

▪ egy szám akkor és csak akkor osztható 6-tal, ha 2-vel és 3-mal is osztható, azaz: a 2-vel és 3-mal való oszthatóság a 6-tal való oszthatóság szükséges és elégséges feltétele.

1.3. Kombinatorika

Tudjon egyszerű sorbarendezési, kiválasztási és egyéb kombinatorikai feladatokat megoldani.

Tudja kiszámolni a binomiális együtthatókat.

Alapfeladatok:

Sorbarendezés (ismétlés nélküli permutáció): n különböző dolgot $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!$ (n faktoriális) féleképpen lehet sorbarendezni.

Definíció szerint $0! = 1$.

Kiválasztás (ismétlés nélküli kombináció): n különböző dolog közül k

darabot $\binom{n}{k}$ -féleképpen választhatunk ki ($n \geq k$), ha nem számít a kivá-

lasztás sorrendje. Az $\binom{n}{k}$ szimbólumot („ n alatt a k ”) binomiális együtthatónak nevezzük, és értékét a következőképpen számoljuk:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Kiválasztás és sorbarendezés (ismétlés nélküli variáció): n különböző

dolog közül k darabot $\frac{n!}{(n-k)!}$ -féleképpen választhatunk ki ($n \geq k$), ha

számít a kiválasztás sorrendje.

Mindhárom esetben beszélhetünk ismétléses típusról is, ilyenkor a dolgok közt vannak egyformák, ill. ugyanazt a dolgot többször is kiválaszthatjuk.

Megoldási módszerek:

Ha a megoldások száma lehetővé teszi, akkor megfelelő az is, ha felsoroljuk az összes lehetőséget.

Ha ez nem kivitelezhető, akkor először azt állapítsuk meg, hogy számít-e a sorrend:

▪ **ha nem számít a sorrend**, akkor egyszerű kiválasztási feladattal van dolgunk, a megoldás $\binom{n}{k}$ alakban írható fel.

Például: hányféleképpen választhatjuk ki az asztalon levő tíz alma közül azt a hetet, amelyikből kompótot készítünk? A kiválasztás sorrendje teljesen mindegy, csak az számít, hogy melyikeket választjuk ki, a lehetőségek száma tehát $\binom{10}{7}$.

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

▪ **ha számít a sorrend**, akkor (függetlenül attól, hogy az összes dolgot kell-e sorbarakni, vagy választunk közülük, ill. ugyanazt többször is választhatjuk-e) a következőképpen gondolkodhatunk: az 1. helyre n_1 féle dolog közül választhatunk, ettől függetlenül a 2. helyre n_2 féle dolog, ... a k . helyre n_k féle dolog közül választhatunk, tehát összesen $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ lehetőségünk van.

Például: hány háromjegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha mindegyiket csak egyszer használhatjuk fel? Számokat készítünk, így természetesen számít a sorrend. Az első helyre 4 számból választhatok (ide nem kerülhet a 0), a másodikra a maradék 4 közül bármelyik kerülhet, a harmadik helyre a maradék 3 közül bármelyik, azaz összesen $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ szám készíthető.

Példák:

Egy 6 tagú társaságban mindenki mindenkivel kezet fog egyszer. Hány kézfogás történik?

1. megoldás: annyi kézfogás történik, ahányféleképpen hat ember közül kiválaszthatjuk azt a kettőt, akik kezet fognak egymással, tehát

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{720}{2 \cdot 24} = 15.$$

2. megoldás: minden ember 5 másikkal fog kezet, ez $6 \cdot 5$. Így azonban minden kézfogást duplán számolunk (a kézfogás mindkét résztvevőjénél számba vesszük), tehát az eredmény: $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

3. megoldás: az első ember 5 másikkal fog kezet, a második már csak 4-gyel (az elsővel való kézfogását az első embernél már számba vettük), a

harmadik 3-mal, a negyedik 2-vek, az ötödik pedig 1-gyel (a hatodik ember összes kézfogását számba vettük már az előző embereknél), így összesen

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 \text{ kézfogás történik.}$$

Egy verseny döntőjében a 10 versenyző között 6 ajándékot osztanak ki. Hányféle jutalmazás lehetséges, ha

- A. az ajándékok egyformák, és mindenki csak egyet kaphat
- B. az ajándékok különbözőek, és mindenki csak egyet kaphat
- C. az ajándékok különbözőek, és mindenki többet is kaphat?

A. Ha az ajándékok egyformák, akkor csak az számít, hogy a 10 versenyző közül hányféleképpen választhatjuk ki azt a hatot, aki ajándékot

kap. Ezt $\binom{10}{6} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$ -féleképpen tehetjük meg.

B. Az ajándékok különbözőek, tehát számít az ajándékozás sorrendje. Felmerülhet, hogy az emberekhez válasszuk az ajándékokat, vagy az ajándékokhoz az embereket. Mivel nem minden ember kap ajándékot, viszont minden ajándékot kiosztanak, az ajándékokhoz választjuk az embereket. Az első ajándékhoz 10 ember közül választhatunk, a másodikhoz 9 közül (mivel mindenki csak egyet kaphat), a harmadikhoz 8 közül, stb. a hatodikhoz 5 közül, így összesen $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151.200$ -féle ajándékozás lehetséges.

C. Az előző esethez hasonlóan gondolkodhatunk, itt is számít a sorrend. Az első ajándékhoz 10 ember közül választhatunk. Mivel egy ember több ajándékot is kaphat, minden további ajándékhoz is 10 ember közül választhatunk, így összesen $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6 = 1.000.000$ -féle ajándékozás lehetséges.

Hányféle sorrendben ülhet le egymás mellé Anna, Béla, Cili és Dóri, ha Anna és Béla egymás mellé akarnak ülni?

„Kössük össze” Annát és Bélát, így 3 embert kell sorba raknunk, amit $3! = 6$ -féleképpen tehetünk meg. Ha „kioldjuk a köteleket”, akkor Anna és Béla minden eddigi sorrendben kétféle módon ülhet le (balról Anna – jobbról Béla, ill. fordítva). Összesen tehát $6 \cdot 2 = 12$ lehetőség van.